Hertentamen Signalen en Systemen

20 januari 2004, 8.30–11.30

□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□—□

Belangrijke punten:

- U bent verplicht om uw collegekaart tijdens de tentamen mede te nemen.
- Schrijf zo netjes mogelijk met een pen of vulpen (geen potlood).
- Vul de kop van het eerste blad volledig in.
- Nummer de bladen en zet bovenaan het eerste blad het totaal aantal ingeleverde bladen en voorzie ieder blad van uw naam.
- Schrijf netjes met blauwe of zwarte pen; geen potlood!
- Schrijf uw naam en studentnummer op de envelop. Na afloop van de toets doet u uw werk in de envelop en levert deze in. Plak deze envelop niet dicht.
- Lees de opgaven eerst rustig door.
- Besteed niet te veel tijd aan een enkele opgave.
- Het gewicht van iedere opgave is in procenten vermeld.
- Het gecorrigeerde werk is na ongeveer drie weken af te halen bij de studieadministratie Wiskunde en Informatica.
- In tegenstelling tot het tentamen is dit hertentamen **geen open boek tentamen**.

– – SUCCES – –

Opgave 1: (20%)
Gegeven een spraak- en of muzieksignaal $x(t)$ met $|X(j2\pi f)| = 0$ voor $|f| >$ 5kHz. Voor de transmissie van spraak en muziek staat een radiofrequentieband, de middengolfband, beschikbaar tussen de 500 en 1500 kHz.

1. Bepaal de minimaal benodigde bemonsteringsfrequentie (sampling-frequency) om dit spraak- en of muzieksignaal zonder verlies van informatie te bemonsteren.
2. Bepaal de laagste en de hoogste draaggolffrequentie (carrier-frequency) voor AM-modulatie van de bovenbedoelde spraak of muziek op de middengolfband.
3. Als de zenderverdeling theoretisch optimaal is (compacte stapeling), hoeveel radiozenders passen er maximaal op de middengolfband.

Opgave 2: (30%)
Beschouw het filter met 3 nulpunten in $z = 1$, $z = \frac{-1+j}{\sqrt{2}}$ en $z = \frac{-1-j}{\sqrt{2}}$:

1. Karakteriseer het bovenstaande filter op basis van de ligging van de polen en nulpunten; d.w.z. welke frequenties uitgedrukt m.b.v. genormaliseerde hoekfrequenties $\hat{\omega}$ laat dit filter wel of niet door.
2. Bepaal de overdrachtsfunctie $H(z)$.
3. Construeer door het bijplaatsen van een minimaal aantal polen of nulpunten in de oorsprong een causaal FIR-filter met dezelfde frequentiedoorlaatkarakteristiek als het bovenbedoelde filter.
4. Geef de differentievergelijking van het onder vraag 3 bedoelde filter. Als het antwoord op vraag 3 ontbreekt mag je ook de differentievergelijking van het onder vraag 2 bedoelde filter geven.

Opgave 3: (25%)

Gegeven een analoog filter dat bestaat uit een serieschakeling van een condensator en een weerstand, een RC-filter. De overdrachtsfunctie van de invoerspanning $x(t)$ naar de spanning over de weerstand is $y(t)$:

$$H(s) = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

1. Gegeven de invoerspanning $x(t) = V + V \cdot sin(\omega t)$ met $\omega = 1/(RC)$. Bepaal de uitvoerspanning als functie van de tijd t.
2. Bepaal de differentiaalvergelijking die het verband tussen $x(t)$ en $y(t)$ beschrijft.
3. Bereken de modulus van de overdrachtsfunctie $|H(j\omega)|$.
4. Teken de modulus van de overdrachtsfunctie $|H(j\omega)|$ als functie van de hoekfrequentie ω.

Opgave 4: (25%)

Beschouw een tijddiscreet B^2-filter met de impulsrespons:

$$h[n] = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad |n| \geq 2 \\ 1 & \text{voor} \quad |n| = 1 \\ 2 & \text{voor} \quad n = 0 \end{cases}$$

1. Is dit filter causaal? Beargumenteer uw antwoord.
2. Is dit filter stabiel? Beargumenteer uw antwoord.
3. Bepaal de staprespons van dit filter.
4. Bepaal de impulsrespons van het B^4-filter; dit filter wordt verkregen door twee B^2-filters in serie achter elkaar te plaatsen.
5. We passen het B^2-filter toe op een bemonsterde beeldlijn uit een grijswaarde beeld. De waarden van van de monsters van een beeldlijn zijn:

   `[ 0, 0, 0, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 2, -2, 2, 0, 0, 0 ]`

   Bepaal de gefilterde beeldlijn. Je mag de randeffecten aan het begin en einde van de beeldlijn verwaarlozen.

Opgave 1:

1. De minimaal benodigde bemonsteringsfrequentie is 2× de hoogste frequentie in het signaal. In dit geval is dat dus 10 kHz.
2. Voor amplitudemodulatie van een signaal met een bandbreedte van 5 kHz is ter weerszijde van de draaggolffrequentie ten minste 5 kHz bandbreedte nodig voor de modulatie. Dat wil zeggen dat 500 + 5 = 505 kHz de laagst mogelijkedraaggolffrequentie is op de middengolfband en 1500-5 = 1495 kHz de hoogst mogelijke draaggolffrequentie is.
3. Bij compact stapelen passen er op een band met een breedte van 1500 - 500 = 1000 kHz slechts 1000 khz / 10 khz = 100 zenders met een bandbreedte van 5 - (-5) = 10 kHz.

Opgave 2:

1. Alle drie de nulpunten liggen op de eenheidscirkel. Een nulpunt op de eenheidscirkel betekent een stopfilter voor de betreffende frequentie. Op basis van de ligging van de nulpunten weten we dat dit filter een stopfilter is voor de genormaliseerde hoekfrequenties waarvoor geldt $\hat{\omega} = \arg z$ waarbij z de positie van het nulpunt is. Dit zijn $\hat{\omega} = \pi$, $\hat{\omega} = \frac{3}{4}\pi$ en $\hat{\omega} = \frac{-3}{4}\pi$. Dit zijn allen hoge frequenties, dus het filter is een laag (en midden) doorlaat filter.
2. We schrijven de overdrachtsfunctie als een polynoom in z met de bedoelde nulpunten:

   $$H(z) = (z-1)(z - \tfrac{-1+j}{\sqrt{2}})(z - \tfrac{-1+j}{\sqrt{2}}) = z^3 + (\sqrt{2}-1)z^2 + (1-\sqrt{2})z - 1$$

3. Het filter is een niet causaal FIR filter wegens het ontbreken van de noemer (FIR-filter) en omdat het polynoom termen bezit met een positieve macht van z (niet causaal). Door de overdrachtsfunctie te delen door z^3, een zuivere vertraging (delay), wordt de niet causaliteit opgeheven. We introduceren hierbij een 3-voudige pool in de oorsprong. De gevraagde overdrachtsfunctie wordt:

   $$H(z) = \frac{z^3+(\sqrt{2}-1)z^2+(1-\sqrt{2})z-1}{z^3} = 1 + (\sqrt{2}-1)z^{-1} + (1-\sqrt{2})z^{-2} - z^{-3}$$

   Dit is de overdrachtsfunctie van een causaal FIR-filter.
4. De differentievergelijking vinden we door $y[n] = H(z) \cdot x[n]$ met z geinterpreteerd als de eenheid verschuivingsoperator uit te werken.

   $$y[n] = x[n] + (\sqrt{2}-1)x[n-1] + (1-\sqrt{2})x[n-2] - x[n-3]$$

Opgave 3:

1. De input bestaat uit de som van twee harmonische functies met respectievelijk $\omega = 0$ en $\omega = \frac{1}{RC}$. Voor beide frequenties bepalen we de versterking en de faseverschuiving. De DC-versterking is $H(s)$ met $s = j\omega = 0$; hieruit volgt $H(0) = 0$. Ofwel de DC-component wordt volledig weg gefilterd. De versterking voor $\omega = 1/(RC)$ vinden we door $s = j\omega = j/(RC)$ in $H(s)$ te substitueren. $H(s) = \frac{j}{1+j}$. Hieruit volgt $|H(s)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ en $\arg(H(s)) = \pi/4$. De uitvoerspanning is dus $y(t) = V/\sqrt{2} \cdot sin(\omega t + \pi/4)$.
2. We realiseren ons dat $s = \dfrac{\partial}{\partial t}$ Na enig formule mannipulatie schrijven we $y(t) = H(s) \cdot x(t)$ als $y(t) = x(t) - RC \cdot s \cdot y(t)$ ofwel $y(t) = x(t) - RC\dfrac{\partial}{\partial t}y(t)$.
3. We berekenen eerste het product $(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)$ en vereenvoudigen dit tot $1 + \omega^2(RC)^2$). Hieruit volgt dat:

$$|H(j\omega)| = \sqrt{|H(j\omega)|^2} = \sqrt{\frac{j\omega RC \cdot -j\omega RC}{(1 + j\omega RC)(1 - j\omega RC)}} = \sqrt{\frac{\omega^2(RC)^2}{1 + \omega^2(RC)^2)}}$$

4. De gevraagde modulus van de overdrachtsfunctie is een symmetrisch met als symmetrieas $\omega = 0$. De kromme heeft zijn minimum bij $|H(j0)| = 0$ en bezit een asymptoot $|H(j\omega)| \rightarrow 1$ voor $\omega \rightarrow \infty$. De kromme raakt de x-as niet. Een paar markante punten vinden we door te stellen dat $\omega^2(RC)^2$ geheeltallig is. $\left|H(j\frac{1}{RC})\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0.7$, $\left|H(j\frac{2}{RC})\right| = \sqrt{\frac{4}{5}} \approx 0.89$ en $\left|H(j\frac{3}{RC})\right| = \sqrt{\frac{9}{10}} \approx 0.95$

Opgave 4:

1. Dit filter niet causaal omdat $h[-1] = 1$.
2. Dit filter berekent een glijdend gemiddelde (moving average filter). Alle filters van dit type zijn stabiel.
3. We bepalen de staprespons door de impulsrespons te sommeren.

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[n]$$

Hieruit volgt

$$s[n] = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad n \leq -2 \\ 1 & \text{voor} \quad n = -1 \\ 3 & \text{voor} \quad n = 0 \\ 4 & \text{voor} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

4. Filters in serie plaatsen betekent convolueren van de impulsresponsen. Ofwel $h_{B^4}[n] = h_{B^2} * h_{B^2}$. Deze convolutie is uit te rekenen met

$$h_{B^4}[n] \sum_{m=-\infty}^{\infty} h_{B^2}[m] h_{B^2}[n-m]$$

$$h_{B^4}[n] = \begin{cases} 0 & \text{voor} \quad |n| \leq 3 \\ 1 & \text{voor} \quad |n| = 2 \\ 4 & \text{voor} \quad |n| = 1 \\ 6 & \text{voor} \quad n = 0 \end{cases}$$

5. Bereken $y = h * x$ waarbij x de gegeven vector is:

$$y[n] \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]h[n-m]$$

Hieruit volgt

```
[ 0, 0, 2, 4, 2, 0, 2, 6, 8, 6, 2, 0, 2, 2, 0 , 2, 2, 0, 0 ]
```